

# 数学形态学骨架化及重建

周南 崔屹

(北京邮电大学机电工程系, 北京 100088)

**摘要** 给出了用数学形态学方法获取二值图象骨架, 及利用骨架完全或部分重建图象的算法和实例。

**关键词** 数学形态学, 骨架, 图象重建。

## 1 引言

骨架是图象几何形态的一种重要拓扑描述。利用骨架表示原始图象, 可以在保持图象重要拓扑特征的前提下, 减少图象中的冗余信息。因此, 被广泛应用于生物形状描述, 模式识别, 工业检测, 定量金相以及图象压缩编码等领域。

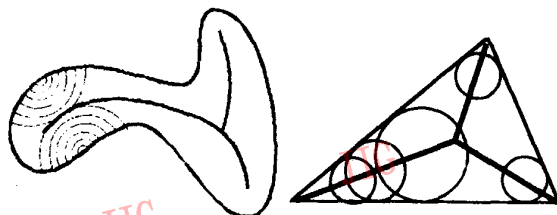
用骨架描述图象的方法最早是由 Blum 提出来的<sup>[1]</sup>, 他使用了中轴的概念: 在  $t=0$  时刻, 将图象边界上所有点同时点燃, 火焰以相同速度向图象内部蔓延, 当波前相遇时, 火焰熄灭, 火焰熄灭处所有点的集合就构成了中轴(即骨架  $SK_F$ )。如果  $x$  为中轴上的点,  $t$  为火焰从点燃到在  $x$  点处熄灭所经历的时间, 则  $t$  与  $x$  之间的关系可用函数  $mid(x)$  表示, 即  $t=mid(x)$ 。函数  $mid(x)$  称为中轴函数, 可以用于图象重建。

骨架还可用最大圆盘的概念来定义。设  $D$  为图象  $S$  中的一个内切圆盘, 即至少有两点与图象边界相切, 如果  $D$  不是图象  $S$  内部任何其它圆盘的子集, 则称为最大圆盘。此时骨架  $SK_M$ , 可定义为图象内部所有最大圆盘圆心的集合。最大圆盘的半径可用于图象的重建。

上面两种方式定义的骨架在多数情况下满足关系:  $SK_F=SK_M$ , 在特殊情况下有:  $SK_F \subset SK_M$ , 差异主要出现在端点处<sup>[2]</sup>, 故一般地有  $SK_F \subset SK_M$ 。在本文中取  $SK_F=SK_M=SK$ 。图 2 给出了一些二值图象骨架的例子。设  $D(x)$  为骨架上点  $x$  处的最大圆盘,

$S$  为原始二值图象,  $SK$  为骨架集合, 则

$$S = \bigcup_{x \in SK} D(x)$$



(a) 火种传播骨架

(b) 最大圆盘骨架

图 1 骨架的定义

Fig. 1 Definitions of the skeleton

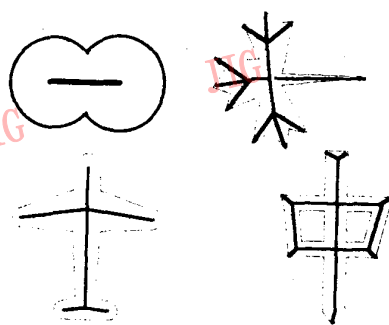


图 2 图象的骨架

Fig. 2 Skeletons of images

## 2 骨架的形态学抽取算法

设  $X$  为  $R^2$  中的连续二值图象,  $S_r(X)$  为  $X$  内

半径为  $r$  的最大圆盘圆心的集合。 $SK(X)$  为  $X$  的骨架, 则  $SK(X)$  可表示为所有骨架子集  $S_r(X)$  的并集, 即

$$SK(X) = \bigcup_{r>0} S_r(X)$$

其中  $S_r(X)$  可用下面的形态学运算得到

$$S_r(X) = (X \ominus rB) - (X \ominus rB)_{drB} \quad (1)$$

$r > 0$ , 且  $(X \ominus rB) \neq \emptyset$

式中, 结构元素  $B$  为一单位圆盘,  $dr$  为一微小正实数,  $r$  为一实数且  $r > 0$ 。显然  $rB$  为半径为  $r$  的圆,  $drB$  是半径为  $dr$  的微小圆盘。运算  $X \ominus rB$  表示  $rB$  对  $X$  的腐蚀, “-”表示集差,  $(\cdot)_{drB}$  为  $drB$  对  $(\cdot)$  的开运算, 即  $[(\cdot) \ominus drB] \oplus drB$ 。附录给出了对公式(1)的证明。

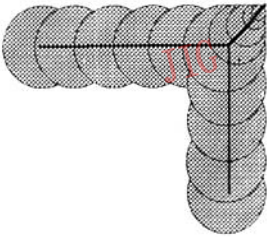


图3 形态学图象重建  
Fig. 3 Image reconstruction

利用骨架子集  $S_r(X)$  及其相应的最大圆盘  $rB$  可按下式唯一地重建原始图象

$$X = \bigcup_{r>0} [S_r(X) \oplus rB] \quad (2)$$

如果只对部分骨架子集使用式(2), 则可部分重建图象。在图象压缩中, 可以用此方法达到控制图象压缩失真度和压缩率的目的。

处理离散图象时, 由于在离散平面中不存在精确的圆盘, 可用其它形状来近似。对于采样栅格为正六角形的离散图象, 可取等边六边形作为近似圆盘。在直角栅格中可采用图4所示的结构元素近似圆盘。

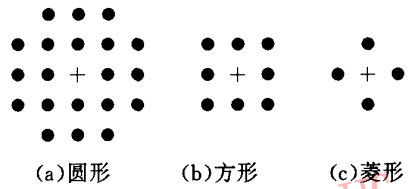


图4 数字圆盘

Fig. 4 Digital disks

若  $X$  为  $Z^2$  上的离散二值图象, 并且非空有界, 则  $X$  的形态学骨架  $SK(X)$  可表示为

$$SK(X) = \bigcup_{n=0}^N S_n(X) \quad (3)$$

$$\text{式中 } S_n(X) = (X \ominus nB) - (X \ominus nB)_B \quad (4)$$

$n > N$  时,  $(X \ominus nB) = \emptyset$

$S_n(X)$  表示  $X$  的第  $n$  个骨架子集, “-”表示集差,  $B$  表示半径为 1 的数字圆盘,  $nB$  表示半径为  $n$  的数字圆盘,  $n=0$  时,  $nB$  为原点像素。  $N$  表示  $X$  中最大的最大圆盘的半径。可以看出  $SK(X)$  是  $N+1$  个骨架子集的并。

离散二值图象  $X$  可以利用骨架子集  $S_n(X)$  的索引  $n$ , 通过对  $N+1$  个子集做膨胀实现完全重建

$$X = \bigcup_{n=0}^N [S_n(x) \oplus nB] \quad (5)$$

如果只使用  $N-k$  个骨架子集, 如取  $n=k, \dots, N$ , 则可以部分地重建目标

$$X' = \bigcup_{n=k}^N [S_n(x) \oplus nB] = X_{kB} \quad (6)$$

图5给出了离散二值图象骨架化及重建的示例。

### 3 形态学骨架化及重建的快速算法

利用形态学方法进行骨架化运算时, 随着  $n$  的

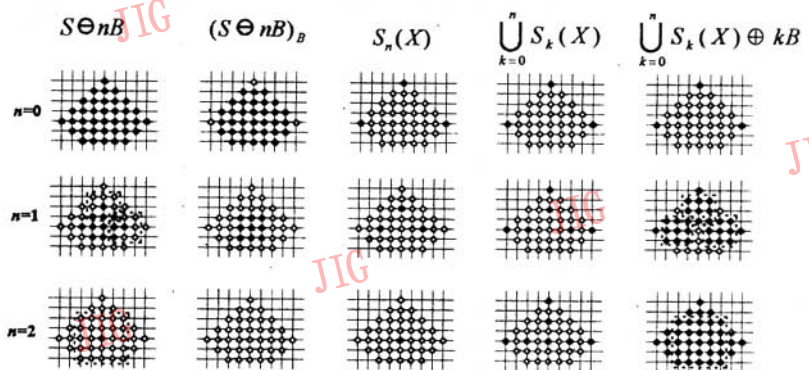


图5 离散图象  $X$  的骨架化及重建(结构元素  $B$  为方形)

Fig. 5 Skeletonization and reconstruction of digital image

增大,运算量呈平方增长,因此有必要寻求快速算法。

考虑  $N \times N$  大小的二值图象  $X$ , 结构元素为图 4 所示的圆形, 如果直接计算  $X \ominus B$ , 需要作 21 次基本运算。将  $B$  按图 6 所示方式分解。即将  $B$  分解为  $B = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$ , 则  $X \ominus B = X \ominus (B_1 \oplus B_2 \oplus B_3) = X \ominus B_1 \ominus B_2 \ominus B_3$ , 只需要进行  $(3+3+5)N^2$  次基本运算。计算复杂度降低 45%。结构元素  $B$  越复杂, 运算效率提高幅度越显著。基于上述考虑, 在形态学骨架计算中, 将  $nB$  分解为

$$nB = \underbrace{B \oplus B \oplus B \oplus \dots \oplus B}_n \quad (7)$$

则式(4)可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_0(X) &= X - [X \ominus B] \oplus B \\ S_1(X) &= (X \ominus B) - [(X \ominus B) \ominus B] \oplus B \\ &\vdots \\ S_N(X) &= (X \ominus \underbrace{B \dots B}_N) - \\ &\quad [(X \ominus \underbrace{B \dots B}_N) \ominus B] \oplus B \end{aligned} \right\} (8)$$

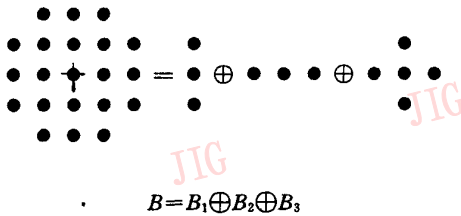


图 6 圆形结构元素的分解  
Fig. 6 Structuring element decomposition

将式(8)代入式(5)便可得到  $X$  的骨架。图象重建时, 可采用相同的方法, 即

$$S_n(X) \oplus nB = S_n(X) \oplus \underbrace{B \oplus \dots \oplus B}_n \quad (9)$$

代入式(5)得

$$X = [\dots [[S_N(x) \oplus B \cup S_{N-1}(x)] \oplus B] \cup S_{N-2}(x) \dots] \oplus B \cup S_0(x) \quad (10)$$

图 7 给出了计算图象的骨架子集, 及利用骨架子集重建原始图象的快速算法。在使用上述分解方法时, 如果基本结构元素  $B$  可分解成为更简单的结构元素, 算法的速度还会有更大的提高。图 8 和图 9 给出了利用上述快速算法获取二值图象形态学骨架并重建的实例, 图 8 中(a)为原始图象; (b)为形态学骨架(结构元素为圆形); (c)为形态学骨架(结构元

素为菱形); (d)用图 c 部分重建的图象(舍去前三级骨架点)。图 9 中(a)为原始图象; (b)为形态学骨架(结构元素为方形); (c)为形态学骨架(结构元素为圆形); (d)用图 c 部分重建的图象(舍去前六级骨架点)

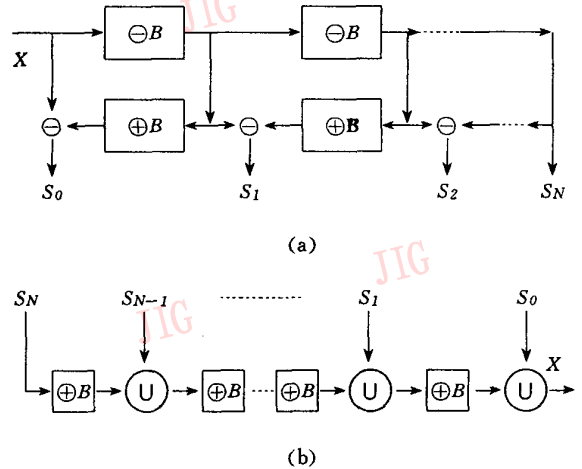


图 7 骨架化和重建的快速算法流程图  
Fig. 7 Fast algorithms of skeletonization and reconstruction

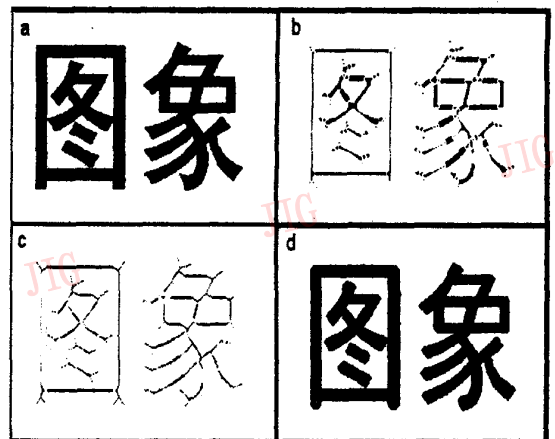


图 8 用形态学方法获取汉字骨架并重建  
Fig. 8 Skeleton and reconstruction of Chinese characters

参考文献

1 Blum H. A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. Models for the Perception of Speech and Visual Forms,

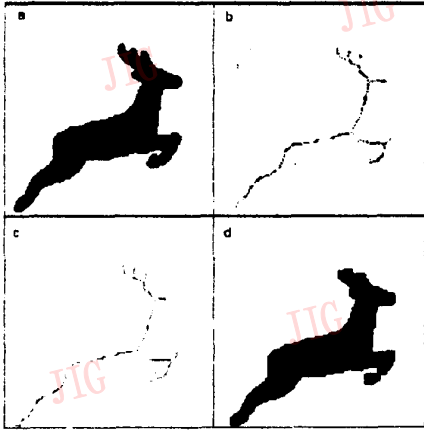


图 9 用形态学方法获取二值图象骨架并重建  
Fig. 9 Skeleton and reconstruction of a binary image

1967.

- Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, 1983.
- Maragos P A, Schafer R W. Morphological Skeleton Representation and Coding of Binary Images. IEEE Trans. Acoust, Speech and Signal Processing, Vol, 1986, ASSP-34(5):1228~1244.
- Kenji Shoji. Generalized Skeleton Representation and Adaptive Pretangular Decomposition of Binary Image, SPIE Vol. 1769 Image Algebra and Morphological Image Processing III (1992).

## 附录 A

对公式(1)的证明

假设  $S_r(X)$  为  $X$  的骨架子集, 则对公式(1)的证明可以从两方面考虑:

(1)  $S_r(X)$  中的点必定是  $X$  内半径为  $r$  的最大圆盘的圆心。

(2)  $X$  内所有以  $r$  为半径的最大圆盘的圆心所组成的集合必为  $S_r(X)$ 。

证明:

(1) 根据式  $S_r(X) = (X \ominus rB) - (X \ominus rB)_{drB}$ , 可以得到  $S_r(X) \subseteq (X \ominus rB)$ 。

对于  $\forall x \in S_r(X)$ , 有  $x \in (X \ominus rB)$ 。

根据腐蚀定义, 可以得到  $rB_x \subseteq X$  ( $rB_x$  表示对  $rB$  作关于  $x$  的平移, 即  $rB_x$  为  $X$  内的圆盘)。

假设  $rB_x$  不是  $X$  内的最大圆盘, 则在  $X$  内必然存在一个圆盘  $(r+dr)B_y$  ( $dr > 0$ ) 使得  $rB_x \subset (r+dr)B_y$ , 因为  $(r+dr)B_y \subset X$ , 所以  $y \in (X \ominus (r+dr)B)$ 。

由关系式  $rB_x \subset (r+dr)B_y$ , 根据形态学运算的递增性得:  $rB_x \ominus rB \subset (r+dr)B_y \ominus rB$

根据腐蚀运算的平移不变性得:  $(rB \ominus rB)_x \subset ((r+dr)B \ominus rB)_y$ , 即  $x \in drB_y$ 。

因为  $y \in (X \ominus (r+dr)B)$ , 有

$$\begin{aligned} (drB)_y &\subset [(X \ominus (r+dr)B) \oplus drB] = \\ &X \ominus rB \ominus drB \oplus drB = \\ &(X \ominus rB)_{drB} \end{aligned}$$

即  $x \in (X \ominus rB)_{drB}$ 。

根据  $(X \ominus rB)_{drB} = (X \ominus rB) - S_r(X)$ , 可以推导出  $x \notin S_r(X)$ , 与前提条件  $x \in S_r(X)$  相悖, 所以假设不成立,  $rB_x$  是  $X$  内的最大圆盘。

(2) 假设  $rB_x$  是  $X$  内的最大圆盘, 而且  $x \notin S_r(X)$ , 即  $x \in (X \ominus rB)$  且  $x \notin X_r(X)$

根据  $S_r(X) = (X \ominus rB) - (X \ominus rB)_{drB}$ , 可以得到  $x \in (X \ominus rB)_{drB}$ 。

根据膨胀定义, 可得  $rB_x \subset (X \ominus rB)_{drB} \oplus rB = (X \ominus (r+dr)B) \oplus (r+dr)B$ 。

对所有  $y \in (X \ominus (r+dr)B)$ , 有  $\cup (r+dr)B_y = (X \ominus (r+dr)B) \oplus (r+dr)B$ , 则  $rB_x \subset \cup (r+dr)B_y$ 。

因为  $r+dr > r$ , 所以对任意  $x$  总存在  $y$  使得  $rB_x \subset (r+dr)B_y$ , 所以  $rB_x$  不是最大圆盘, 假设不成立, 证毕。



周南, 北京市邮政科学研究所, 硕士, 目前研究方向数学形态学图象处理。

## Skeletonization and Reconstruction via Mathematical Morphology

Zhou Nan, Cui Yi

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100088)

**Abstract** This paper presents algorithms and applications of acquiring skeleton of binary image and completely or partially reconstructing binary image from its skeleton using mathematical morphology method.

**Keywords** Mathematical morphology, Skeleton, Reconstruction

(上接 700 页)



贾晓光,毕业于哈尔滨工业大学无线电系获学士和硕士学位,留学英国南安普敦大学电子学与计算机科学获博士学位;现在是哈尔滨工业大学航天学院教授她目前从事图象处理、基于图象特征信息的目标提取与识别、卫星及有效载荷的电子系统、以及卫星应用的研究和开发。

## The Up-to-date Development of Data Compression Techniques in Space-based Remote Sensing

Jia Xiaoguang, Wang Lei

(Dept. of Astronautics, Electronics & Opto-Electronic Engineering, Harbin Institute of Technology, Haerbin 150001)

**Abstract** The state-of-the-art of image compression techniques are summarized in the paper whilst the emphasis is specially on those for data from space-borne remote sensors. Suggestions of using various techniques in space-based remote sensing are proposed. The system configurations on space-based lossless and lossy compression and ground-based data compression are rendered.

**Keywords** Image compression, Fidelity, Lossy compression, Lossless compression, Classification, Remote sensing, Rice algorithm